

«Η κατανόηση των χαρακτηριστικών στοιχείων του τριγώνου μέσα σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων από μαθητές στ' δημοτικού. Η οικοδόμηση της έννοιας του εμβαδού»

Κουρινιώτης Σταύρος

Δάσκαλος, 4^ο Δημοτικό Σχολείο Μενεμένης
st_danc@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία υλοποιήθηκε στο πλαίσιο μεταπτυχιακού προγράμματος και περιγράφει τη διεξαγωγή ενός διδακτικού πειράματος για τη διδασκαλία των χαρακτηριστικών στοιχείων των τριγώνων και του εμβαδού σε μαθητές ΣΤ' Δημοτικού επικεντρώνοντας στην οικοδόμηση των εννοιών από τους μαθητές αλλά και στη διερεύνηση των εννοιών μέσω μιας ποικιλίας διαφορετικών πλαισίων αναπαράστασης. Ως διαφορετικά πλαίσια αναπαράστασης συμπεριλαμβάνονται σχήματα σε χαρτί μοτίβων, χειραπτικά υλικά και μοντέλα (όπως ο γεωπίνακας, τριγωνικά πλαστικά πλακίδια και ξύλινα τρίγωνα δυναμικής μεταβολής) και το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Cabri-Geometry II. Οι δραστηριότητες στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές, είχαν στόχο την ανάδειξη πρότερων γνώσεων, τη διερεύνηση του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με την ταξινόμια Van Hiele, στην παρώθηση της γεωμετρικής τους σκέψης μέσω της διερεύνησης των ιδιοτήτων των τριγώνων και στην πραγμάτευση της έννοιας του εμβαδού. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η συνδυαστική χρήση αυτών των μέσων και υλικών και η μεταφορά των μαθητών ανάμεσα στα διάφορα πλαίσια αναπαράστασης βοήθησε στην κατανόηση των εννοιών, στην υπέρβαση των παρανοήσεων και έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. Όμως εξίσου σημαντική ήταν η διαμόρφωση ενός διδακτικού και μαθησιακού περιβάλλοντος το οποίο ενθάρρυνε την συνεργασία, τη διερεύνηση και την αιτιολόγηση των δράσεων και των κατασκευών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: πολλαπλές αναπαραστάσεις, περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία περιγράφει τη διεξαγωγή ενός διδακτικού πειράματος για τη διδασκαλία των χαρακτηριστικών στοιχείων των τριγώνων σε μαθητές ΣΤ' Δημοτικού επικεντρώνοντας στην οικοδόμηση των εννοιών από τους μαθητές, σύμφωνα με την επικοινωνιακή θεώρηση και το κοινωνικοπολιτισμικό

πλαίσιο, αλλά και στη διερεύνηση των εννοιών μέσω μιας ποικιλίας διαφορετικών πλαισίων αναπαράστασης.

Τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων αποτελούν τον πυρήνα του συγκεκριμένου παραδείγματος και σε αυτά συμπεριλαμβάνονται σχήματα σε μοτίβα, χειραπτικά υλικά και μοντέλα όπως ο γεωπίνακας, τριγωνικά πλαστικά πλακίδια και ξύλινα τρίγωνα δυναμικής μεταβολής και τέλος η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Cabri-Geometry II.

Σκοπός ήταν η παρώθηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σε ανώτερα επίπεδα της ταξινομίας Van Hiele, μέσω της διερεύνησης των ιδιοτήτων των τριγώνων και η καλύτερη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Ιδιαίτερα για το εμβαδόν, έγινε προσπάθεια να μελετηθεί η διατήρησή του η οποία συμβάλλει στην κατανόησή του (Kordaki & Balomenou 2006), να διαπιστωθεί από τους ίδιους τους μαθητές η εξάρτηση του από το μήκος της βάσης και του ύψους και τέλος να γίνει υπέρβαση της σύγχυσης μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού.

Εκτός από την καινοτόμο εισαγωγή του δυναμικού ξύλινου τριγώνου, το διδακτικό πείραμα φιλοδοξούσε να δείξει εάν η χρήση των διαφορετικών πλαισίων αναπαράστασης, η οποία έχει ήδη εφαρμοστεί θετικά σε διάφορα μαθηματικά και γεωμετρικά διδακτικά αντικείμενα, μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση των συγκεκριμένων εννοιών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συνδυαστική χρήση των μέσων και υλικών που χρησιμοποιήθηκαν, βοήθησε στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών και στην άρση των παρανοήσεων. Οι μαθητές ήταν σε θέση να εφαρμόζουν αυτή τη γνώση για την κατασκευή ισοεμβαδικών τριγώνων και στη μετέπειτα φάση της αξιολόγησης. Ωστόσο η διατήρηση κάποιων δυσκολιών επισημαίνει την ανάγκη αλλαγής της κουλτούρας της τάξης και εδραίωσης ανάλογων εκπαιδευτικών πρακτικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αποδεχόμενοι τη θέση των νατουραλιστικών και ερμηνευτικών προσεγγίσεων ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά δεν διέπεται από γενικούς νόμους και ότι η κατανόησή της μπορεί να γίνει μόνο από κάποιον ερευνητή που έχει κοινό πλαίσιο αναφοράς με τα άτομα αυτά και λαμβάνοντας υπόψη κάποια επιπρόσθετα χαρακτηριστικά τους όπως: «έρευνα μικρής κλίμακας», «υποκειμενικότητα», «μη στατικό μοντέλο», «ερμηνεία του συγκεκριμένου», «κατανόηση περισσότερο των δράσεων», «ο ερευνητής ανθρώπινο εργαλείο» (Cohen et al., 2008), επιλέξαμε το διδακτικό πείραμα ως μια εκδοχή των παραπάνω προσεγγίσεων, το οποίο χρησιμοποιεί ποιοτικές τεχνικές συλλογής, ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων και ενδείκνυται για την εκπαιδευτική έρευνα τέτοιας μορφής. Το διδακτικό πείραμα προσπαθεί να περιγράψει, να ερμηνεύσει και να κατανοήσει ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ενσωματώνονται κάποιες διδακτικές καινοτομίες καθώς και να αποτυπώσει τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής.

Στο συγκεκριμένο διδακτικό πείραμα ο Δάσκαλος είχε ταυτόχρονα και το ρόλο του ερευνητή. Ο πληθυσμός της έρευνας αποτελούνταν από μαθητές

της ΣΤ' Δημοτικού. Το δείγμα αποτέλεσαν κυρίως δύο ομάδες μαθητών με διαφοροποίηση στις μαθηματικές επιδόσεις, έτσι ώστε να καλυφθεί ο παράγοντας της ετερογένειας. Δημιουργήθηκε η ομάδα Α (China Town), (Αλέξανδρος, Αθηνά, Ηρώ, Αφροδίτη) με καλές επιδόσεις στη γεωμετρία και η ομάδα Β (Σκορπιοί), (Δημοσθένης, Θάλεια, Ειρήνη, Δάφνη) με σχετικές μαθησιακές δυσκολίες. Να σημειωθεί ότι οι μαθητές αυτοί ερχόταν για πρώτη φορά σε επαφή με τα υλικά και μέσα που χρησιμοποιήθηκαν.

Διατέθηκαν (4) τέσσερα δίωρα. Στον χρόνο αυτό συμπεριλαμβάνονταν και οι δραστηριότητες διερεύνησης των πρότερων γνώσεων και των επιπέδων Van Hiele οι οποίες όμως ήταν σημαντικές για το εποικοδομιστικό μοντέλο που επιλέχθηκε. Επιπρόσθετα, στόχος ήταν η κατανόηση των εννοιών, η υπέρβαση της σύγχυσης μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου και η άρση των παρανοήσεων καθώς, όπως έχει δείξει η εμπειρία, η περιορισμένη γνώση γεωμετρικών εννοιών οδηγεί σε αυτές (Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007). Η συλλογή των δεδομένων προήλθε από τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας των μαθητών, από τις παρατηρήσεις του ερευνητή, από τις φωτογραφίες των κατασκευών και τις καταγραφές οθόνης στο περιβάλλον του Η/Υ και τέλος από τις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος. Δύο περίπου μήνες αργότερα πραγματοποιήθηκε η φάση της αξιολόγησης με παρόμοιες δραστηριότητες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εμβαδόν- Διδακτικές αρχές

Στα Νέα Προγράμματα Σπουδών για τη Γεωμετρία αναφέρεται ότι παρόλο που οι διαδικασίες μέτρησης μεγεθών συμβάλουν στην ουσιαστική κατανόηση των μεγεθών εκ μέρους των μαθητών, η μέχρι πρότινος διδακτική τους εισαγωγή ήταν ελλιπής (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013). Οι μετρήσεις μεγεθών, όπως υποστηρίζει ο Van de Walle (2005), μπορούν να γίνουν και με μη τυπικές μονάδες μέτρησης οι οποίες έχουν το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τη διερεύνηση σχέσεων στις οποίες εμπλέκονται. Επιπρόσθετα ο Tan (Wu-Yuin Hwang et al., 2009) προτείνει ότι η κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού πρέπει να προέλθει από την εμπειρία χειρισμών κάλυψης επιφανειών με υλικά, για να μπορέσει αργότερα να κατανοηθεί και η χρήση γεωμετρικών τύπων.

Κύρια χαρακτηριστικά των επιπέδων Van Hiele

Η θεωρία των Van Hiele έχει ως βασικό γνώρισμα την ιεράρχηση σε πέντε επίπεδα του τρόπου κατανόησης και της νοητικής επεξεργασίας των γεωμετρικών ιδεών. Στο επίπεδο 0 (νοερή απεικόνιση) οι μαθητές αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα σχήματα με βάση τα καθολικά οπτικά τους χαρακτηριστικά, χωρίς να επεξεργάζονται με σαφήνεια τις ιδιότητές τους. Στο επίπεδο 1 (ανάλυση) μπορούν να αντιμετωπίζουν τα σχήματα, όχι ως μεμονωμένες φιγούρες, αλλά στο πλαίσιο μιας τάξης σχημάτων, η οποία περιλαμβάνει κοινά χαρακτηριστικά. Αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν περιορίζονται στις αναγκαίες για να τα ορίσουν.

Στο επίπεδο 2 (μη τυπική παραγωγή) γίνεται χρήση μιας ποικιλίας ιδιοτήτων για την ταξινόμηση σχημάτων. Υπάρχει δυνατότητα διάκρισης των αναγκαίων και επαρκών ιδιοτήτων για τον προσδιορισμό ενός σχήματος, νοερής μετατροπής σχημάτων, δημιουργίας και δοκιμής υποθέσεων, χρήσης λογικών εξηγήσεων και αιτιολόγησης συμπερασμάτων. Στο επίπεδο 3 (παραγωγή) οι μαθητές αναπτύσσουν σταδιακά ένα σύστημα αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και προτάσεων και τέλος στο ανώτερο επίπεδο της ιεραρχίας (επιστημονική αυστηρότητα) οι σπουδαστές μελετούν τις σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας (Van de Walle, 2005).

Πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης

Στην ανάπτυξη της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών μπορεί αναμφισβήτητα να συμβάλλει και η παροχή πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης μιας έννοιας, όπως καταγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία. Οι Lesh et al., (Van de Walle, 2005) επισημαίνουν ότι οι μεταφορές ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών βοηθούν στην ανάπτυξη νέων εννοιών, ενώ και ο Zoltan Dienes αναφέρει ότι η ποικιλία αναπαράστασης μιας ιδέας και η πολλαπλή έκφρασή της υποστηρίζει την κατανόησή της από τους μαθητές (Moyer, 2001). Οι Wu-Yuin Hwang et al., (2009) στη δική τους μελέτη υποστήριξαν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις ήταν χρήσιμες και βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων.

Ωστόσο η Sweller (Wing-Kwong Wong et al., 2011) σημειώνει ότι «η μάθηση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτεί συσχετισμό ανόμοιων πηγών πληροφορίας, οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν γνωστική υπερφόρτωση αφήνοντας λίγο χώρο για ενεργητική μάθηση», ενώ και η Seufert (2003) επισημαίνει πως η απόκτηση γνώσης από πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι αδύνατη από μαθητές με ελάχιστη προηγούμενη γνώση. Η Ainsworth (2006) σωστά υποστηρίζει ότι: «το ζήτημα δεν είναι εάν τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων είναι αποτελεσματικά, αλλά περισσότερο η αναφορά στις περιστάσεις που επηρεάζουν την αποτελεσματικότητά τους.»

Χειραπτικά υλικά

Ως πλαίσια αναπαραστάσεων μπορούν να θεωρηθούν και κάποια χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία. Με τον όρο αυτό εννοούμε τα διδακτικά υλικά τα οποία σχεδιάστηκαν για να αναπαραστήσουν διάφορες αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και τα οποία ο μαθητής χειρίζεται με τα χέρια του προσπαθώντας να κάνει συσχέτιση με τις έννοιες αυτές και να οδηγηθεί στην κατανόησή τους. Η χρήση τους «δεν παίζει μόνο το διαμεσολαβητικό ρόλο ανάμεσα στο χειροπιαστό και το αφηρημένο αλλά αποτελεί μια καλή ευκαιρία ανάδειξης και διαπραγμάτευσης πρότερων εμπειριών των παιδιών και εξέλιξης των εμπειριών αυτών σε γνώσεις» (Βιβλίο δασκάλου, 2007).

Από τους πρώτους υποστηρικτές και σχεδιαστές τέτοιων υλικών ήταν η Montessori και ο Froebel, οι οποίοι υποστήριζαν τη σημασία της παιγνιώδους

ανακάλυψης στη μάθηση και τη χρήση των υλικών για τη μάθηση πιο αφαιρετικών μαθηματικών (Manches & O'Malley, 2012).

Υπάρχουν και ερευνητές όπως οι Resnick & Omanson (Meira, 1998) που εκφράζουν σκεπτικισμό για τη θετική επίδραση των χειραπτικών μέσων στη διδασκαλία. Γι' αυτό θα ήταν ίσως προτιμότερο να επικεντρωθεί κανείς σε αυτό που αναφέρει ο Bauersfeld: «τα υλικά δεν μιλάνε από μόνα τους», αλλά πρέπει να ιδωθούν σε συνδυασμό με την κουλτούρα της τάξης και τον τρόπο που αλληλεπιδρούν δάσκαλοι και μαθητές μεταξύ τους αλλά και με τα υλικά (Markopoulos & Potari, 2000).

Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας αποτελούν επίσης ένα εναλλακτικό πλαίσιο αναπαράστασης εννοιών. Είναι μια κατηγορία λογισμικών, όπου ο μαθητής μπορεί να μεταβάλει σταδιακά κάποια στοιχεία ενός σχήματος και παράλληλα να παρατηρεί την μεταβολή ή τη διατήρηση κάποιων άλλων χαρακτηριστικών του. Το σύρσιμο (dragging), το οποίο είναι η καρδιά της δυναμικής γεωμετρίας, απελευθερώνει ένα σχήμα από τον συμβατικό του ρόλο, που είναι η αναπαράσταση ή η τυπική περίπτωση, και μετατρέπεται σε μια γενική περίπτωση, στην οποία αναφέρονται τα μαθηματικά». (Βοσνιάδου, 2006). Οι Sarama & Clements (2009) αναφέρουν επίσης ότι οι γεωμετρικοί χειρισμοί στον Η/Υ μπορούν να ενθαρρύνουν τη νοητική σύνθεση και αποσύνθεση των σχημάτων και πως η ευελιξία αυτών των χειρισμών επιτρέπει στους μαθητές την καλύτερη εξερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων.

Από την άλλη μεριά ο Holz (2001) παρατηρεί ότι αν και τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να υποστηρίξουν την διερευνητική μάθηση, συνήθως χρησιμοποιούνται για επιβεβαίωση γνωστών δεδομένων, ενώ και η Laborde (2001), αναφέρθηκε σε περιπτώσεις μειωμένης και στατικής χρήσης των δυνατοτήτων του λογισμικού. Επομένως θα πρέπει να έχουμε υπόψιν αυτό που οι Ράπτης και Ράπτη (2001) δηλώνουν χαρακτηριστικά: «τόσο οι απελευθερωτικές, όσο και οι αρνητικές δυνατότητες του Η/Υ δεν πραγματώνονται μηχανικά και απρόσκοπτα, αλλά προϋποθέτουν ορισμένες αλλαγές νοοτροπιών και πρακτικών στο σύνολο των φορέων που εμπλέκονται στην εκπαιδευτική διαδικασία».

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι δραστηριότητες 1 έως 3 είχαν στόχο την ανάδειξη πρότερων γνώσεων, οι δραστηριότητες 4 έως 6 τη διερεύνηση του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των παιδιών σύμφωνα με την ταξινόμια Van Hiele και οι δραστηριότητες 7 έως 12 αποσκοπούσαν στην παρώθηση της γεωμετρικής τους σκέψης, μέσω της περαιτέρω διερεύνησης των ιδιοτήτων των τριγώνων και της μεταξύ τους σχέσης. Τέλος στις δραστηριότητες 13 έως 20 είχαμε την πραγμάτευση της έννοιας του εμβαδού. Στο πλαίσιο αυτών των ενοτήτων αναλύθηκαν τέσσερις άξονες οι οποίοι συνίστανται στα εξής:

- ◆ Οι δυνατότητες και οι αδυναμίες που εμφάνισαν οι μαθητές
- ◆ Διατύπωση εξηγήσεων και ανάδειξη ενδεχόμενων αιτιών των παραπάνω καταστάσεων

- ♦ Διδακτικές πρακτικές για την υπέρβαση των παραπάνω αδυναμιών
- ♦ Αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης

Στο φύλλο εργασίας 2 ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν πώς αντιλαμβάνονται την έννοια του εμβαδού. Αρκετά παιδιά (5) έδειξαν να συγχέουν τις έννοιες εμβαδού και περιμέτρου:

Φύλλο εργασίας 2: Τι εννοούμε λέγοντας ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδό από ένα άλλο;

Ελπίδα: Εννοούμε ότι το σχήμα έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το άλλο.

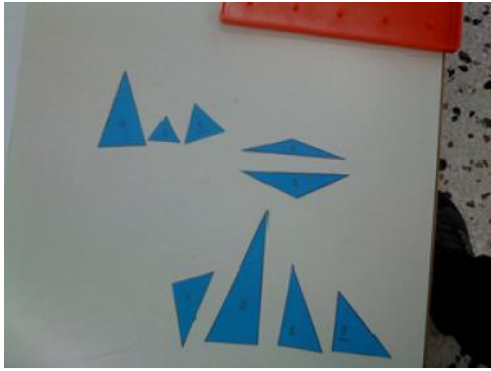
Μια προσεκτικότερη παρατήρηση των φύλλων εργασίας αυτών των παιδιών δείχνει ότι αντιλαμβάνονται τη διαφορά των δύο εννοιών, αλλά τις συνδέουν με σχέση παράλληλης αυξομείωσης. Η αντίληψη αυτή είναι πιθανόν διαμορφωμένη από τη γνώση που έχουν για το εμβαδόν του τετραγώνου, το οποίο αυξάνεται πάντοτε όταν αυξάνεται η περίμετρος. Οι μαθητές δεν μπορούσαν ακόμη να αντιληφθούν τις ιδιαιτερότητες της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου στα τρίγωνα.

Η δραστηριότητα 3 στόχευε στην υπενθύμιση των διαφόρων ειδών τριγώνων, αλλά και στην εξοικείωση με το υλικό του γεωπίνακα, στον οποίο έπρεπε να κατασκευάσουν ένα ισοσκελές και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Κάποιοι μαθητές παραπλανήθηκαν οπτικά και θεώρησαν ισόπλευρο το ισοσκελές τρίγωνο που είχαν φτιάξει (Σχήμα 1). Χρειάστηκε η παρέμβασή μου, για να αντιληφθούν το «συντακτικό» του υλικού, δηλαδή τις αποστάσεις στον διάστικτο γεωπίνακα, τη μη ισομετρικότητα διαγώνιων και οριζόντιων αποστάσεων, καθώς και τη χρησιμότητα των κουκίδων (καρφιών) στον υπολογισμό των αποστάσεων.



Σχήμα 1: Κατασκευές τριγώνων στο γεωπίνακα.

Οι δραστηριότητες 4 και 5 ήταν δραστηριότητες ταξινόμησης. Στο φύλλο εργασίας 5 κλήθηκαν να ταξινομήσουν διάφορα κομμάτια από χάρτινα τρίγωνα εστιάζοντας στις ιδιότητες (χαρακτηριστικό του επιπέδου 1) και όχι στην απλή αναγνώριση. Τους ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους. Αρκετά παιδιά (7) εστίασαν στις κοινές ιδιότητες των σχημάτων και τα ταξινόμησαν ανάλογα, παρέχοντας ορθή αιτιολόγηση για την επιλογή τους και δείχνοντας επάρκεια στο επίπεδο 1 των Van Hiele (Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Ταξινόμηση τριγώνων.



Σχήμα 3: Φύλλο εργασίας 5.

Υπήρξαν και μαθητές που τα έβαζαν μεν σωστά, αλλά δεν εξηγούσαν το «γιατί» (δηλαδή τη σχέση των ιδιοτήτων). (Σχήμα 3).

Η ώθηση που δόθηκε σε αυτό το επίπεδο ήταν να προσπαθήσουν να βρουν διαφορετικές κοινές ιδιότητες εμβαθύνοντας έτσι στην καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συσχετίζονται τα σχήματα μεταξύ τους. Με τις κατάλληλες ερωτήσεις και τον ανάλογο προβληματισμό, οι μαθητές αντιλήφθηκαν και αναγνώρισαν και άλλες κοινές ιδιότητες, εστιάζοντας π.χ. πέρα από τις γωνίες και στον συσχετισμό των πλευρών τους και ανέπτυξαν τη γεωμετρική τους σκέψη:

Δάσκαλος: Βάλ' τα τώρα μαζί και με άλλο τρόπο.

Μενέλαος: Με άλλο τρόπο;

Δάσκαλος: Δηλαδή, το 2, έχει κάτι άλλο εκτός από μια αμβλεία γωνία;

Ποιος θα μου πει;

Αλέξανδρος: Το 2 είναι και ισοσκελές.

Δάσκαλος: Άρα με ποιο μπορεί να πάει;

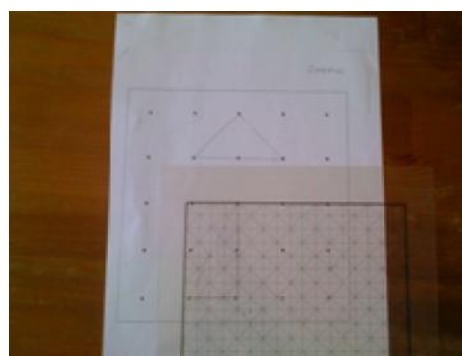
Αλέξανδρος: Με το 4, με το 6, το 5 ...

Με τις δραστηριότητες 6 και 7 έγινε προσπάθεια να ανιχνευτεί εάν η γεωμετρική σκέψη των μαθητών βρίσκεται στο επίπεδο 2 των Van Hiele. Μία ένδειξη γι' αυτό το επίπεδο αποτελεί η ικανότητα να αναγνωρίζουν και να επιλέγουν από μια λίστα ιδιοτήτων τις αναγκαίες και επαρκείς ιδιότητες για τον χαρακτηρισμό ενός γεωμετρικού σχήματος. Στην αναγνώριση του ορθογωνίου τριγώνου, η πλειοψηφία των μαθητών (9) αναγνώρισε τις περισσότερες από αυτές κάνοντας μία έως δύο το πολύ λανθασμένες επιλογές. Ο προσδιορισμός της επαρκούς ιδιότητας προβλημάτισε τους μαθητές, οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα (το να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες) μη κάνοντας τον συλλογισμό ότι με την ύπαρξη της ορθής γωνίας εξυπακούονται οι δύο οξείες. τους βοήθησα να το καταλάβουν αναφέροντας το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Αφού οι μαθητές προσπαθώντας να συγκρίνουν κάποια τρίγωνα προβληματίστηκαν για τον υπολογισμό του εμβαδού, στη δραστηριότητα 13 προέβησαν σε χειρισμούς κάλυψης επιφανειών με διάφορα υλικά καθώς η εμπειρία αυτή, όπως είδαμε στη σχετική βιβλιογραφία, είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού. Σχημάτισαν στον γεωπίνακα δύο διαφορετικά τρίγωνα, τα αντέγραψαν στο ανάλογο μοτίβο και εν συνεχεία τους ζητήθηκε να τα γεμίσουν με φασόλια και να μετρήσουν τον αριθμό που περιείχε το κάθε σχήμα (Σχήμα 4). Επιπρόσθετα χρησιμοποιήθηκαν διαφάνειες με ισομετρικούς καμβάδες ως «εναλλακτικοί χάρακες για το εμβαδόν» (Van de Walle, 2005, Παράρτημα), τις οποίες οι μαθητές τοποθέτησαν επάνω στα τρίγωνα και καταμέτρησαν πόσα τριγωνάκια περιείχε το καθένα (Σχήμα 5).



Σχήμα 4: Κάλυψη επιφανειών με φασόλια.



Σχήμα 5: Διαφάνειες με ισομετρικούς καμβάδες.

Το αποτέλεσμα ήταν ότι και με τις δύο άτυπες μετρήσεις, αντιλήφθηκαν και κατανόησαν τις διαφορές του μεγέθους μεταξύ των δύο επιφανειών (ή την ισότητα σε κάποιες περιπτώσεις), αλλά και την έννοια του εμβαδού γενικότερα.

Η δραστηριότητα 14 είχε ως στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το εμβαδόν τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και του ύψους του. Δουλεύοντας με το δυναμικό ξύλινο τρίγωνο, κατέγραψαν στην αρχική κλειστή του θέση το μέγεθος της επιφάνειάς του (δηλαδή το εμβαδόν) χρησιμοποιώντας τα φασόλια (Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Κάλυψη με φασόλια στην αρχική θέση.



Σχήμα 7: Κάλυψη με φασόλια στο νέο τρίγωνο.

Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να προβλέψουν τις άμεσες και έμμεσες αλλαγές των στοιχείων του, εάν σύρουν την επάνω κορυφή Α και διατηρήσουν σταθερό το ύψος και τη βάση του. Η διατύπωση και η δοκιμή υποθέσεων, αλλά και η διαδικασία της νοερής μετατροπής των σχημάτων, η οποία σύμφωνα με τους Markopoulos & Potari (2000) προηγείται της φυσικής μετατροπής στις περιπτώσεις που οι μαθητές πρέπει να προβλέψουν κάνοντας πιο σύνθετη και απαιτητική τη διαδικασία της σκέψης τους, ώθησαν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών καθώς αποτελούν χαρακτηριστικά του επιπέδου 2 των Van Hiele. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν σε αυτή τη διαδικασία της πρόβλεψης και της νοερής μετατροπής, αφού συνεργαζόμενοι και συζητώντας σε ομάδες συμπλήρωσαν τα φύλλα εργασίας (ασχέτως εάν ήταν σωστές ή όχι οι προβλέψεις τους). Στη συνέχεια έλεγξαν τις προβλέψεις τους γεμίζοντας πάλι το νέο τρίγωνο με φασόλια (Σχήμα 7) και κατέγραψαν τις αλλαγές. Η ομάδα Β, μέσω της βιωματικής αυτής δραστηριότητας, διαπίστωσε τη μη αλλαγή του εμβαδού (στην περίπτωση που βάση και ύψος παραμένουν σταθερά) και αναθεώρησε την αρχική της υπόθεση:

Δάσκαλος(προς ομάδα Β): Θα αλλάξει το εμβαδόν;

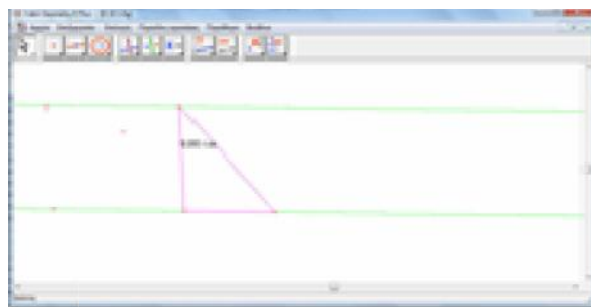
Δημοσθένης (και όλη η ομάδα Β): Θα αλλάξει.

Δάσκαλος:Για πείτε μου τώρα (Μετά την καταμέτρηση των φασολιών) το εμβαδόν άλλαξε;

Ειρήνη: Όχι.

Έπειτα οι μαθητές επανέλαβαν την ίδια διαδικασία (με πρόβλεψη και έλεγχο) αλλάζοντας διαδοχικά το ύψος και το μήκος της βάσης και αυτή τη φορά διαπίστωσαν την αλλαγή του εμβαδού. Με όλη αυτή τη δραστηριότητα, με τη διατύπωση των υποθέσεων, τη δοκιμή τους με κατάλληλα και εύχρηστα υλικά (δυναμικά τρίγωνα, φασόλια), αλλά και την αλληλεπίδραση και τη συζήτηση που δημιουργήθηκε, οι μαθητές οδηγήθηκαν μόνοι τους στο συμπέρασμα και έδειξαν να έχουν κατανοήσει ότι το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και από το μήκος του αντίστοιχου ύψους προς αυτή.

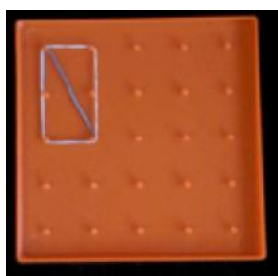
Στη συνέχεια εισήχθη ένα ακόμη διαφορετικό πλαίσιο αναπαράστασης, το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri Geometry II plus. Αφού έγινε γνωριμία με τη διεπαφή του λογισμικού, με τη δραστηριότητα 16 διαπίστωσαν στο περιβάλλον του Cabri τη διατήρηση του εμβαδού του τριγώνου, όταν το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους παραμένουν αμετάβλητα. Βασικός στόχος ήταν η ώθηση της γεωμετρικής τους σκέψης στο επίπεδο 2 Van Hiele μέσω της προσπάθειας αιτιολόγησης της διατήρησης του εμβαδού, καθώς χαρακτηριστικό του επιπέδου αυτού αποτελεί η καλλιέργεια της λογικής και η ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων. Κατασκεύασαν δύο παράλληλες ευθείες και ένα τρίγωνο μέσα σε αυτές (Σχήμα 8). Ενεργοποίησαν το εργαλείο αυτόματης μέτρησης του εμβαδού και σέρνοντας την κορυφή κλήθηκαν να παρατηρήσουν τις τιμές του εμβαδού.



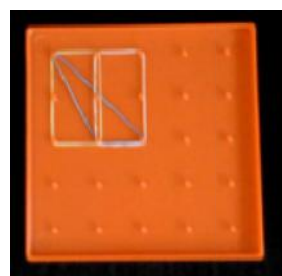
Σχήμα 8: Διατήρηση εμβαδού.

Ωστόσο η ομάδα Β' έδειξε αδυναμία στην τεκμηρίωση και αιτιολόγηση αυτής της διατήρησης. Η παρέμβαση αφορούσε την παρατήρηση της βάσης και του ύψους του τριγώνου. Ήταν αντιληπτό απ' όλους ότι η βάση παρέμενε σταθερή. Η Θάλεια στην ερώτηση εάν αλλάζει το ύψος, απάντησε καταφατικά και έδειξε να έχει ξεχάσει τη διατήρηση της σταθερής απόστασης μεταξύ των παραλλήλων ευθειών. Αναφέροντας το παράδειγμα των σιδηροδρομικών γραμμών, κατανόησε ότι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων είναι σταθερή, διότι διαφορετικά το τρένο θα εκτροχιαζόταν. Εν συνεχεία αναγνωρίζοντας την ταύτιση απόστασης παράλληλων ευθειών και ύψους τριγώνου και συσχετίζοντας τις παρατηρήσεις για τη βάση, το ύψος και το εμβαδόν, κατάφερε να αιτιολογήσει αυτή τη θεώρηση.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να μετρήσουν στον γεωπίνακα το εμβαδόν των τριγώνων (πόσα κουτάκια είναι) με βάση ορθογώνια σχήματα, με τα οποία περιέκλεισαν τα τρίγωνα. Όσον αφορά το ορθογώνιο τρίγωνο, η διαδικασία ήταν σχετικά εύκολη (Σχήμα 9). Για τους άλλους τύπους τριγώνων οι μαθητές ναι μεν αντιλήφθηκαν ότι θα πρέπει να το περικλείουν τμηματικά, ωστόσο δυσκολεύτηκαν στον υπολογισμό μικρών τμημάτων του τριγώνου και χρειάστηκε να επιμείνουμε λιγάκι περισσότερο (Σχήμα 10).



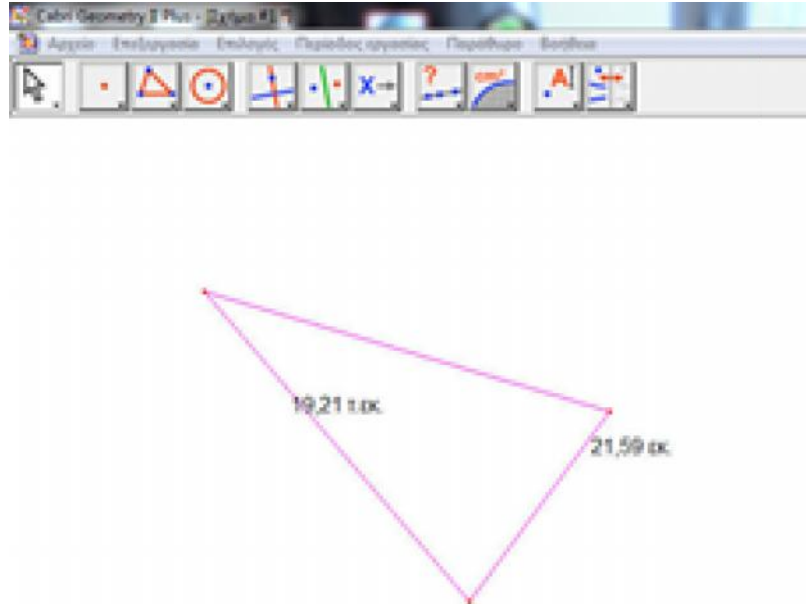
Σχήμα 9: Μέτρηση εμβαδού.



Σχήμα 10: Μέτρηση εμβαδού.

Η τελευταία δραστηριότητα στόχευε στην αποσαφήνιση και τη διάκριση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού, μιας και όπως έχουμε δει, παρατηρήθηκε σε κάποιες περιπτώσεις σύγχυση και παρανόηση τους από μερίδα μαθητών. Σε αυτή την αποσαφήνιση συνέβαλε η αξιοποίηση των εργαλείων της ταυτόχρονης μέτρησης περιμέτρου και εμβαδού του λογισμικού Cabri καθώς οι Kordaki & Balomenou (2006) υποστηρίζουν ότι η ταυτόχρονη μέτρησή τους με τα συγκεκριμένα εργαλεία βοηθάει τους μαθητές στη διάκριση αυτών των εννοιών. Αφού κατασκεύασαν ένα τρίγωνο, ενεργοποίησαν τα

συγκεκριμένα εργαλεία και σέρνοντας κάποια κορυφή έπρεπε να παρατήρησουν τη δυναμική μεταβολή στις τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού. Αντιλήφθηκαν έτσι ότι πρόκειται για διακριτές έννοιες, με τη μία (περίμετρος) να σχετίζεται με την αυξομείωση των πλευρών και την άλλη (εμβαδόν) με τον χώρο που το τρίγωνο καταλαμβάνει (Σχήμα 11).



Σχήμα 11: Ταυτόχρονη μέτρηση εμβαδού-περιμέτρου.

Στη διάκριση των εννοιών συνέβαλε και η παρατήρηση της σχέσης στη μεταβολή των τιμών τους, η οποία δεν ήταν ανάλογη. Οι μαθητές κλήθηκαν να διαπιστώσουν το είδος αυτής της μεταβολής. Η διαπίστωση έγινε πολύ εύκολα με τα εργαλεία του λογισμικού, τα οποία παρείχαν τη δυνατότητα στους μαθητές να μεταβάλλουν πολλές φορές τις τιμές, μέχρι να καταλήξουν στο συμπέρασμα που έψαχναν και να αναθεωρήσουν την αρχική εσφαλμένη άποψη, ότι η τιμή του εμβαδού μεγαλώνει παράλληλα με την τιμή της περιμέτρου:

Δάσκαλος: Ωραία.. Πάω να μεγαλώσω την περίμετρο. Το εμβαδόν από 51 πόσο πήγε;

Δάφνη: 50,94.

Δάσκαλος: Μεγάλωσε ή μίκρυνε;

Δάφνη: Μίκρυνε.

Δάσκαλος: Μίκρυνε ενώ η περίμετρος μεγάλωσε. Άρα ισχύει αυτό που είπατε πριν;

Δάφνη: Όχι!

Στη φάση της αξιολόγησης ζητήθηκε η κατασκευή και η αιτιολόγηση ισοεμβαδικών τριγώνων στα διαφορετικά πλαίσια. Η πλειοψηφία των μαθητών έδειξε να θυμάται την εξάρτηση του εμβαδού τριγώνου από το μήκος της βάσης και του ύψους και ήταν σε θέση να εφαρμόζει τη γνώση αυτή για τις κατασκευές τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο διδακτικό πείραμα που παρουσιάστηκε στην παρούσα μελέτη, διερευνήθηκε εάν η συνδυαστική χρήση κάποιων μέσων και υλικών και η μεταφορά μέσα σε πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης, μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και στην καλύτερη κατανόηση του εμβαδού τριγώνου.

Αρκετοί μαθητές (περισσότερο της ομάδας Β) έδειξαν να συγχέουν τις έννοιες εμβαδού και περιμέτρου, κυρίως προσδίδοντας σε αυτές μία σχέση παράλληλης αυξομείωσης. Η υπέρβαση αυτής της σύγχυσης έγινε με τη χρήση των εργαλείων αυτόματης μέτρησης εμβαδού και περιμέτρου στο περιβάλλον του λογισμικού και επιβεβαιώθηκε με την αναθεώρηση της αρχικής τους εκτίμησης, αλλά και με τις απαντήσεις τους στις δραστηριότητες αξιολόγησης από την πλειοψηφία των μαθητών. Το αποτέλεσμα επιβεβαίωσε τα ερευνητικά δεδομένα, ότι η συνδυαστική χρήση των δύο εργαλείων βοηθά στη διάκριση των παραπάνω εννοιών.

Σχετικά με την ανίχνευση των επιπέδων Van Hiele, οι μαθητές έδειξαν να βρίσκονται μεταξύ των επιπέδων 1 και 2. Κάποιοι μπορούσαν να ταξινομήσουν σχήματα με διαφορετικούς τρόπους (ομάδα Α και Β) και να διακρίνουν τις αναγκαίες ιδιότητες των σχημάτων (ομάδα Α). Τα προβλήματα εντοπίστηκαν στη ανεπάρκεια μαθηματικής γλώσσας, στην μη αναγνώριση των επαρκών ιδιοτήτων για τον χαρακτηρισμό ενός σχήματος (ομάδα Α, Β) και κυρίως στις δυσκολίες αιτιολόγησης, όπως στις περιπτώσεις ταξινομήσεων (ομάδα Β) ή συνύπαρξης ιδιοτήτων (π.χ. αμβλυγώνιο και ισόπλευρο) (ομάδα Α και Β).

Η παράλληλη κατασκευή των σχημάτων στον γεωπίνακα ή στα μοτίβα των καμβάδων βοήθησε στην οπτικοποίησή τους και διευκόλυνε τις αποδεικτικές διαδικασίες καθώς στο νοητικό–αφαιρετικό επίπεδο ήταν πιο δύσκολο για τους μαθητές να προσδιορίσουν τα σχήματα. Σημαντική συμβολή στη διερεύνηση των σχέσεων είχε επίσης το ξύλινο τρίγωνο και το περιβάλλον του λογισμικού, τα οποία μέσω της δυναμικής μεταβολής έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές (κυρίως της ομάδας με τις μαθησιακές δυσκολίες) να αντιληφθούν την επίδραση του μήκους της βάσης και του ύψους στο μέγεθος του εμβαδού, αλλά και να αναθεωρήσουν σε κάποιες περιπτώσεις τις λανθασμένες αντιλήψεις τους. Η κάλυψη επιφανειών με υλικά βοήθησε στην κατανόηση της διαφοράς μεταξύ δύο επιφανειών, αλλά και της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού. Στο πλαίσιο της αντιστοιχίας μεταξύ των αναπαραστάσεων, οι μαθητές έφτιαξαν ισοεμβαδικά τρίγωνα και στα τρία πλαίσια (ξύλινα τρίγωνα, γεωπίνακας, Cabri) και έδειξαν ότι εμπέδωσαν την έννοια της διατήρησης του εμβαδού, πράγμα που αποτυπώθηκε και στις δραστηριότητες αξιολόγησης και από τις δύο ομάδες. Το εύρημα αυτό συμπλέει με την άποψη της Confrey (1990) ότι «η σύγκλιση μιας έννοιας σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων συμβάλλει σε μια ισχυρή κατασκευή».

Εκτός όμως από τη χρήση των υλικών και της μεταφοράς των μαθητών στα διαφορετικά πλαίσια αναπαράστασης, εξίσου σημαντική ήταν η διαμόρφωση ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος. Δόθηκε βαρύτητα στην ενεργητική συμμετοχή του μαθητή, στη διατύπωση κατάλληλων

ερωτήσεων, στην αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητών, αλλά και μαθητών μεταξύ τους, στην καλλιέργεια διαλόγου και ελεύθερης έκφρασης των απόψεων, στην αμφισβήτηση των επιχειρημάτων και στη διαδικασία διατύπωσης και δοκιμής υποθέσεων. Η όλη διαδικασία επαλήθευσε τα θεωρητικά δεδομένα ότι η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και η πρόοδος μεταξύ των επιπέδων επηρεάζεται από τις πλούσιες γεωμετρικές εμπειρίες τις οποίες βιώνουν τα παιδιά (Van de Walle, 2005).

Ωστόσο, παρά την παροχή αυτού του υποστηρικτικού πλαισίου, κάποιοι μαθητές εξακολούθησαν να έχουν δυσκολίες στον υπολογισμό του εμβαδού στον γεωπίνακα, αλλά και αδυναμία αιτιολόγησης των επιλογών τους. Απαιτείται η συχνότερη χρήση των χειραπτικών υλικών και η κατανόηση του «συντακτικού» τους, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο η κάθε αναπαράσταση κωδικοποιεί και παρουσιάζει τις πληροφορίες. Σχετικά με την αιτιολόγηση, αν και υπήρξε βελτίωση στον τομέα αυτό, η ανάπτυξή της απαιτεί μακροχρόνια προσπάθεια και η διδασκαλία θα πρέπει να διέπεται καθημερινά από αυτή, έτσι ώστε οι μαθητές να συνηθίσουν σε μια «μικροκουλτούρα αιτιολόγησης» και να αναμένουν πάντοτε από τον εκπαιδευτικό να ερωτηθούν και να δώσουν εξηγήσεις για την κάθε τους κατασκευή. Η αναμονή αυτή, όπως επισημαίνουν και οι Cobb et al., (1990) «διευκολύνει την ανάπτυξη της υποχρέωσης να κατανοήσουν τα πράγματα όταν εργάζονται σε ομάδες».

Βέβαια όλα τα παραπάνω αποτελέσματα διατυπώνονται με επιφύλαξη, αφενός γιατί η έρευνα διεξήχθη σε ένα μικρό μόνο δείγμα μαθητών και αφετέρου διότι η κάθε τάξη αποτελεί μια ξεχωριστή περίπτωση με τη δική της δυναμική. Παρόλα αυτά είναι επιτακτικό να προσανατολιστούμε στη διαφοροποίηση των εκπαιδευτικών στόχων, με έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων, έτσι ώστε οι μαθητές μέσω του αναστοχασμού και της προσπάθειας έκφρασης του συλλογισμού τους να οδηγηθούν στη συνειδητή δράση και στη γνωστική αυτονομία αποφασίζοντας οι ίδιοι για την επάρκεια των κατασκευών τους.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βιβλίο δασκάλου, Μαθηματικά (2007). *Ένταξη τσιγγανοπαίδων στο σχολείο, Μεθοδολογικές οδηγίες για τη δημιουργική χρήση των βιβλίων του μαθητή στα τμήματα ένταξης*. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Βοσνιάδου, Στέλλα (2006). *Παιδιά, Σχολεία και Υπολογιστές. Προοπτικές, προβλήματα και προτάσεις για την αποτελεσματικότερη χρήση των νέων τεχνολογιών στη εκπαίδευση*. Gutenberg. Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007-2013). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα)- Νέο Πρόγραμμα σπουδών, στους άξονες προτεραιότητας 1,2,3 – Οριζόντια Πράξη». Κωδικός MIS 295450.

Ράπτης, Α., Ράπτη, Α. (2001). Είναι δυνατόν να αλλάξει η κουλτούρα της μάθησης με την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση; Η σημασία της παιδαγωγικής μόρφωσης των εκπαιδευτικών και η υστέρηση της εκπαιδευτικής πολιτικής στη χώρα μας. Στο: *Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση*.

Τεχνικές, Εφαρμογές, Κατάρτιση Εκπαιδευτικών. Πρακτικά συνεδρίου του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Τμήμα Ελληνικών και Μεσογειακών Σπουδών. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Επιμέλεια Κώστας Τσολακίδης (σελ. 47-70). Ρόδος.

Τριανταφυλλίδης, Α., Τριαντάφυλλος & Σδρόλιας, Α., Κωνσταντίνος (2007). Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. ΤΥΠΩΘΗΤΩ- Γεώργιος Δάρδανος. Αθήνα.

Ainsworth, Shaaron (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, pp. 183-198.

Cobb, Paul, Wood, Terry & Yackel Erna, (1990). Chapter 9: Classrooms as Learning Environments for Teachers and Researchers. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, Vol. 4, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, pp. 125-146.

Cohen, L., Manion L. & Morrison K., (2008). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. Μεταίχμιο. Αθήνα.

Confrey, Jere (1990). Chapter 8: What Constructivism Implies for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, Vol. 4, pp. 107-122.

Holz, Reinhard (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations –A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 6: 63-86.

Kordaki, Maria & Balomenou, Athanasia, (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11: pp. 99-135.

Laborde, Colette (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 283-317.

Manches, Andrew & O' Maley, Claire, (2012). Tangibles for learning: a representational analysis of physical manipulation. *Pers Ubiquit Comput* 16: pp. 405-419.

Markopoulos, C. & Potari, D., (2000). Dynamic Transformations of Solids in the Mathematics Classroom. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima, Japan.

Meira, Luciano (1998). Making sense of Instructional Devices: The emergence of Transparency in Mathematic Activity, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29. No 2, pp. 121-142.

Moyer, S. Patricia (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47: pp. 175-197.

Sarama, Julie & Clements, H., Douglas, (2009). "Concrete" Computer Manipulatives in Mathematics Education. *Child Development Perspectives*. Volume 3, Number 3, pp. 145-150.

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, 13, pp. 227-237.

Van de Walle, A. John (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Επιστημονική επιμέλεια: Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης. ΤΥΠΩΘΗΤΩ- Γεώργιος Δάρδανος. Αθήνα.

Wing-Kwong Wong, Sheng-Kai Yin, Hsi-Hsun Yang & Ying-Hao Cheng, (2011). Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, 14(3), pp. 43-54.

Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, (2009). A Study of Multi-Representation of Geometry Problem Solving with Virtual Manipulatives and Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 12(3), 229-247.